Calculs différentiels et intégrales dans le plan

I. Métrique des courbes du plan

$\mathcal{P}$ désigne le plan géométrique muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°) Longueur d'arc

$\Gamma=(I,M)$ désigne un arc de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k\geq 1$.

Déf : Soit $a,b\in I$ tels que $a\leq b$ et $A=M(a)$, $B=M(b)$.

On appelle longueur du sous arc $\overset{\frown}{AB}$ de Γ le réel $L_{\overset{\frown}{AB}}=\int_a^b\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|\mathrm{d}t$.

Déf : On appelle longueur d'un arc $\Gamma=([a,b],M)$ le réel $L=\int_a^b\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|\mathrm{d}t$

2°) Abscisse curviligne

Déf : On appelle abscisse curviligne le long de l'arc Γ toute fonction $s:I\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall t\in I,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)=\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|$.

Prop : Si s désigne une abscisse curviligne le long de Γ alors pour tout $A=M(a)$ et $B=M(b)$ (avec $a\leq b$) alors $L_{\overset{\frown}{AB}}=s(b)-s(a)$.

Déf : Soit $t_0\in I$ et $M_0=M(t_0)$. L'abscisse curviligne définie par $s(t)=\int_{t_0}^t\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(u)\right\|\mathrm{d}u$ est appelée abscisse curviligne d'origine M_0.

En Particulier :

Pour $\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$: $\overrightarrow{OM}(t)\begin{vmatrix}x(t)\\y(t)\end{vmatrix}$, $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\begin{vmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{vmatrix}$ donc $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{x'^2+y'^2}$.

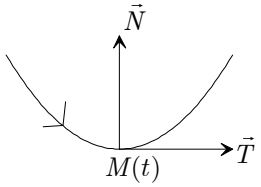
Pour $\Gamma:y=f(x)$: $\overrightarrow{OM}(x)\begin{vmatrix}x\\f(x)\end{vmatrix}$, $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}x}(x)\begin{vmatrix}1\\f'(x)\end{vmatrix}$ donc $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+f'^2}$.

Pour $\Gamma:\rho=\rho(\theta)$: $\overrightarrow{OM}(\theta)=\rho(\theta)\vec{u}_\theta$, $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)=\rho'(\theta)\vec{u}_\theta+\rho(\theta)\vec{v}_\theta$ donc $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{\rho'^2+\rho^2}$.

3°) Repère de Frénêt

Soit $\Gamma=(I,M)$ un arc régulier de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k\geq 1$).

Soit $t\in I$ fixé. Comme Γ est régulier au point $M(t)$, l'arc y présente une tangente dirigée par $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)$.



On note $\vec{T}(t)=\frac{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)}{\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|}$ le vecteur unitaire associé à $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)$ et $\vec{N}(t)$ le vecteur image de $\vec{T}(t)$ par un quart de tour direct.

Déf : La base orthonormée directe $(\vec{T}(t),\vec{N}(t))$ est appelée base de Frénêt au point $M(t)$.
Repère de Frénêt, vecteur tangent et vecteur normal.

4°) Changement de paramétrage

I et J désignent des intervalles non singuliers de $\mathbb{R}$.

Soit $\varphi : I \to J$ une application bijective de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que sa réciproque.

Réaliser le changement de paramétrage défini par la relation $u = \varphi(t)$, consiste à observer que toute fonction en la variable $t \in I$ définit une fonction en la variable $u \in J$ via la relation $u = \varphi(t)$. Plus précisément :

Pour $f : t \mapsto f(t)$ une fonction définie sur I, on considère $\tilde{f} : u \mapsto \tilde{f}(u)$ définie sur J par :

$\forall u \in J, \tilde{f}(u) = f(\varphi^{-1}(u))$ de sorte que $\tilde{f}(u) = f(t)$ lorsque $u = \varphi(t)$.

Puisque $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ et $f = \tilde{f} \circ \varphi$ on a f de classe $\mathcal{C}^k$ ssi $\tilde{f}$ l'est.

On a $\forall t \in I, f(t) = \tilde{f}(\varphi(t))$ (1) et $\forall u \in J, \tilde{f}(u) = f(\varphi^{-1}(u))$ (2)

En dérivant ces relations, on obtient :

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\mathrm{d}\tilde{f}}{\mathrm{d}u}(\varphi(t))$ (3) et $\frac{\mathrm{d}\tilde{f}}{\mathrm{d}u}(u) = \frac{\mathrm{d}\varphi^{-1}}{\mathrm{d}t}(u)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\varphi^{-1}(u))$ (4).

Afin de manipuler aisément ces relations, on réalise les abus suivants :

- on confond f et $\tilde{f}$,
- on ne précise pas les points d'évaluation des dérivées,
- on note $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}$ au lieu de $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}\varphi^{-1}}{\mathrm{d}u}$.

(3) devient alors $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}$ et (4) devient $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

De plus $\varphi^{-1}(\varphi(t)) = t$ donne $\frac{\mathrm{d}\varphi^{-1}}{\mathrm{d}u}(\varphi(t))\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t) = 1$ soit $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 1$.

Soit $\varphi : I \to J$ bijective, $\mathcal{C}^k$ ainsi que sa réciproque et $\Gamma = (I, M)$ un arc paramétré en la variable t

Réaliser le changement de paramétrage défini par la relation $u = \varphi(t)$ consiste à considérer l'arc (J, M) avec $M(u) = M(t)$. Ce nouvel arc décrit le même support que Γ dans le même sens si φ est croissante et dans le sens contraire si φ est décroissante.

On a $\vec{v}(u) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ et $\vec{a}(u) = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}u^2} = \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}u^2}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$.

Déf : Une notion invariante par changement de paramétrage est qualifiée de géométrique.

Déf : Une notion invariante par changement de paramétrage croissant est qualifiée de géométrique orientée.

5°) Paramétrage normal d'un arc régulier

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 1$) régulier et s une abscisse curviligne le long de Γ.

On peut réaliser le changement de paramétrage défini par la relation $s = s(t)$.

Déf : On dit que s est un paramétrage admissible de l'arc Γ.

On considère alors le nouvel arc (J, M) avec $M(s) = M(t)$. Pour cet arc $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$, or $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right\|$,

donc $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \vec{T}$. Ainsi l'arc (J, M) est un paramétrage réalisé à vitesse constante égale à 1.

Déf : On l'appelle paramétrage normal de l'arc Γ.

6°) Détermination angulaire

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc régulier de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 2$.

a) définition

Déf : On appelle détermination angulaire le long de Γ toute application $\alpha : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall t \in I, \alpha(t) = (\vec{i}, \vec{T}(t)) \quad [2\pi]$.

Prop : Si α est une détermination angulaire le long de Γ alors

$\vec{T}\begin{vmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{vmatrix}$ et $\vec{N}\begin{vmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{vmatrix}$.

Problème : Comment obtenir une détermination angulaire α ?

b) cas d'un paramétrage cartésien

Puisque $\vec{T}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}OM}}{\mathrm{d}s}\begin{vmatrix}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\end{vmatrix}$ on a : $\vec{T}\begin{vmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{vmatrix}$ ssi $\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} & (1)\\ \sin\alpha=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} & (2)\end{cases}$

c) cas d'une courbe définie par une équation polaire

$\alpha=(\vec{i},\vec{T})=(\vec{i},\vec{u}_\theta)+(\vec{u}_\theta,\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}OM}}{\mathrm{d}\theta})=\theta+V \quad [2\pi]$

$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}OM}}{\mathrm{d}\theta}=\rho(\theta)\vec{u}_\theta+\rho'(\theta)\vec{v}_\theta$ permet d'étudier V.

7°) Courbure et rayon de courbure

Soit $\Gamma=(I,M)$ un arc régulier de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k\geq 2$), s une abscisse curviligne et α une détermination angulaire le long de Γ

a) courbure

Déf : Soit M un point de l'arc Γ. On appelle courbure de l'arc Γ en M le réel : $\gamma=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}.\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$

Prop : En notant $(\vec{T},\vec{N})$ la base de Frénêt au point M on a :

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}=\gamma\vec{N}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s}=-\gamma\vec{T}$.

b) rayon de courbure en un point birégulier

Déf : Soit M un point birégulier de l'arc étudié. On appelle rayon de courbure au point M l'inverse de la courbure en ce point i.e. : $R=\dfrac{1}{\gamma}$. Le point Ω défini par la relation $\overrightarrow{M\Omega}=R.\vec{N}$ est alors appelé centre de courbure au point M et le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $|R|$ est appelé cercle osculateur de l'arc au point M.

Prop : Si l'arc Γ est birégulier alors α est un paramétrage $\mathcal{C}^{k-1}$ admissible de l'arc Γ et on a alors les relations : $R=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}$, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}\alpha}=\vec{N}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}\alpha}=-\vec{T}$.

c) calcul de la courbure

Soit $\Gamma=(I,M)$ un arc régulier. Pour déterminer la courbure γ le long de Γ :

- on calcule $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left\|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}OM}}{\mathrm{d}t}\right\|$,
- on détermine une fonction dérivable α telle que $\alpha=(\vec{i},\vec{T})\ [2\pi]$
- on conclut via $\gamma=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}.\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$.

8°) Formules

a) formules de Frénêt

Considérons le mouvement $t \mapsto M(t)$ en un point régulier de courbure égale à γ.

$v = \left\| \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}OM}}{\mathrm{d}t} \right\| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}OM}}{\mathrm{d}s} = v.\vec{T}$.

$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v.\vec{T})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.\vec{T} + v.\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.\vec{T} + v.\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.\vec{T} + \gamma v^2 \vec{N}$.

Ainsi dans la base de Frénêt : $\begin{cases} \vec{v} = v.\vec{T} \\ \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + \gamma v^2 \vec{N} \end{cases}$ et donc $\mathrm{Det}(\vec{v},\vec{a}) = \gamma v^3$ donc $\gamma = \frac{\mathrm{Det}(\vec{v},\vec{a})}{v^3}$.

Cas : $\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. $\gamma = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$.

Cas : $\Gamma : y = f(x)$. $\gamma = \frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{3/2}}$

Cas : $\Gamma : \rho = \rho(\theta)$. $\gamma = \frac{2\rho'^2 + \rho^2 - \rho\rho''}{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}$.

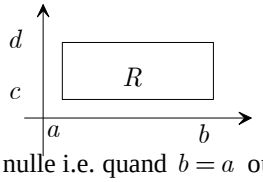
II. Intégrale double

On se positionne dans le plan $\mathbb{R}^2$

1°) Aire d'un domaine de $\mathbb{R}^2$

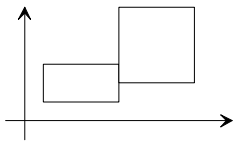
a) pavage

Déf : On appelle pavé de $\mathbb{R}^2$ toute partie $R = [a,b]\times[c,d]$ avec $a \le b, c \le d$.
On appelle aire de ce pavé le réel :
$\mathrm{Aire}(R) = (b-a)(d-c)$.
Un pavé est dit singulier lorsque celui-ci est d'aire nulle i.e. quand $b = a$ ou $d = c$.

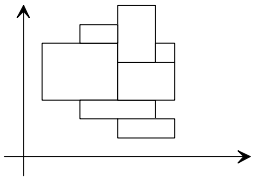


Prop : L'intersection de deux pavés est soit vide, soit égale à un pavé.

Déf : Deux pavés sont dits quasi-disjoints ssi leur intersection est vide ou égale à un pavé singulier.



Déf : On appelle pavage du plan $\mathbb{R}^2$ toute famille finie $\mathcal{P} = (R_1,...,R_n)$ formées de pavés deux à deux quasi-disjoints.
On appelle support de ce pavage l'ensemble :
$\mathrm{Supp}(\mathcal{P}) = R_1 \cup ... \cup R_n$.
On appelle aire de ce pavage le réel
$Aire(\mathcal{P}) = Aire(R_1) + ... + Aire(R_n)$.



b) partie quarrable

Soit $\mathcal{D}$ une partie bornée non vide de $\mathbb{R}^2$.

Déf : On appelle pavage intérieur à $\mathcal{D}$ tout pavage dont le support est inclus dans $\mathcal{D}$.
On appelle pavage extérieur à $\mathcal{D}$ tout pavage dont le support contient $\mathcal{D}$.

Prop : Si $\mathcal{P}^-$ et $\mathcal{P}^+$ désignent des pavages respectivement intérieur et extérieur à $\mathcal{D}$ alors
$\mathrm{Aire}(\mathcal{P}^-) \le \mathrm{Aire}(\mathcal{P}^+)$

Déf : On appelle aire intérieure à $\mathcal{D}$, la borne supérieure des aires des pavages intérieurs à $\mathcal{D}$. On la note $\text{Aire}^-(\mathcal{D})$.
On appelle aire extérieure à $\mathcal{D}$, la borne inférieure des aires des pavages extérieurs à $\mathcal{D}$. On la note $\text{Aire}^+(\mathcal{D})$.

Prop : On a $\text{Aire}^-(\mathcal{D}) \leq \text{Aire}^+(\mathcal{D})$.

Déf : La partie $\mathcal{D}$ est dite quarrable ssi $\text{Aire}^-(\mathcal{D}) = \text{Aire}^+(\mathcal{D})$.
Cette valeur commune est appelée aire de $\mathcal{D}$ et est notée $\text{Aire}(\mathcal{D})$.

Convention : On dit que $\varnothing$ est quarrable et on pose $\text{Aire}(\varnothing) = 0$.

Prop : Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux parties bornées quarrables de $\mathbb{R}^2$.
Si $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ alors $\text{Aire}(\mathcal{D}) \leq \text{Aire}(\mathcal{D}')$.

Prop : Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux parties bornées quarrables de $\mathbb{R}^2$.
$\mathcal{D} \cup \mathcal{D}', \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ sont quarrables et $\text{Aire}(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}') = \text{Aire}(\mathcal{D}) + \text{Aire}(\mathcal{D}') - \text{Aire}(\mathcal{D} \cap \mathcal{D}')$.

Déf : Deux parties quarrables sont dites quasi-disjointes ssi $\text{Aire}(\mathcal{D} \cap \mathcal{D}') = 0$.

Prop : Toute partie bornée délimitée par une ligne brisée est quarrable.

2°) Intégration sur un pavé

Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ un pavé de $\mathbb{R}^2$.

Théorème : de Fubini

Soit $f : \begin{cases} R \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto f(x,y) \end{cases}$ une fonction continue.

La fonction $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ est continue sur $[a,b]$, la fonction $y \mapsto \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x$ est continue sur $[c,d]$ et $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$.

Déf : Cette quantité est alors appelée intégrale de f sur le pavé R. On la note $\iint_R f$ ou $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

En particulier :

Si $f(x,y) = g(x)h(y)$ alors $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ldots = \left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \right) \left(\int_c^d h(y)\mathrm{d}y \right)$.

Prop : Soit $f, g : R \to \mathbb{R}$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
$\iint_R \lambda f + \mu g = \lambda \iint_R f + \mu \iint_R g$.
Si $f \leq g$ alors $\iint_R f \leq \iint_R g$.
Si $f \geq 0$ et $\iint_R f = 0$ alors $f = 0$ ou $\text{Aire}(R) = 0$.

3°) Intégration sur un compact quarrable

a) partie compacte

Déf : Une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ est dite fermée ssi son complémentaire est ouvert.

Déf : Une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ est dite compacte ssi $\mathcal{D}$ est fermée et bornée.

Théorème :

Toute fonction réelle définie et continue sur une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ y est bornée.

b) définition de l'intégrale

Soit $\mathcal{D}$ un domaine compacte quarrable non vide.

Soit $f : \begin{cases} \mathcal{D} \to \mathbb{R}^+ \\ (x,y) \mapsto f(x,y) \end{cases}$ continue.

Pour $\mathcal{P}=(R_1,...,R_n)$ pavage intérieur à $\mathcal{D}$, on note $I_{\mathcal{D}}(f)=\sum_{k=1}^{n}\iint_{R_k} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

f étant continue sur un compact, $\exists M\in\mathbb{R}^+, \forall (x,y)\in\mathcal{D}, f(x,y)\le M$.

Par suite : $I_{\mathcal{P}}(f)\le\sum_{k=1}^{n}\iint_{R_k} M\mathrm{d}x\mathrm{d}y = M\sum_{k=1}^{n}\text{Aire}(R_k)\le M\,\text{Aire}(\mathcal{D})$. Les $I_{\mathcal{P}}(f)$ sont donc majorées.

Déf : On appelle intégrale de la fonction positive f sur $\mathcal{D}$ la borne supérieure des $I_{\mathcal{P}}(f)$ pour $\mathcal{P}$ pavage intérieur à $\mathcal{D}$.
Celle-ci est notée $\iint_{\mathcal{D}} f$ ou $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Soit $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ continue. $f^+=\sup(f,0)$ et $f^-=\inf(f,0)$ sont deux fonctions continues et $f=f^+-f^-$.

Déf : On appelle intégrale de la fonction continue $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ le réel :
$\iint_{\mathcal{D}} f=\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\mathcal{D}} f^+-\iint_{\mathcal{D}} f^-$.

Convention : Si $\mathcal{D}=\varnothing$ on pose $\iint_{\mathcal{D}} f=0$.

c) propriétés

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux parties compactes quarrables de $\mathbb{R}^2$

Prop : Soit $f,g:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ continues et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
$\iint_{\mathcal{D}}\lambda f+\mu g=\lambda\iint_{\mathcal{D}} f+\mu\iint_{\mathcal{D}} g$.
Si $f\le g$ alors $\iint_{\mathcal{D}} f\le\iint_{\mathcal{D}} g$.

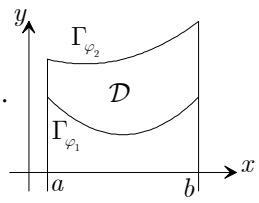
Prop : Si $\mathcal{D}\subset\mathcal{D}'$ et $f:\mathcal{D}'\to\mathbb{R}$ continue et positive alors $\iint_{\mathcal{D}} f\le\iint_{\mathcal{D}'} f$.

Prop : Si $f:\mathcal{D}\cup\mathcal{D}'\to\mathbb{R}$ continue alors $\iint_{\mathcal{D}\cup\mathcal{D}'} f=\iint_{\mathcal{D}} f+\iint_{\mathcal{D}'} f-\iint_{\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'} f$.

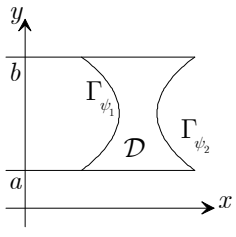
4°) Théorème de Fubini

Théorème :

Soit $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues telles que $\varphi_1\le\varphi_2$.
Soit $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / a\le x\le b \text{ et } \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$.
$\mathcal{D}$ est une partie compacte quarrable et pour tout $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ continue on a :
$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{x=a}^{b}\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.



Soit $\psi_1,\psi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues telles que $\psi_1\le\psi_2$.
Soit $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / a\le y\le b \text{ et } \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$.
$\mathcal{D}$ est une partie compacte quarrable et pour tout $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ continue on a :
$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{y=a}^{b}\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.



5°) Changement de variables affine

Soit $\varphi:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\(x,y)\mapsto(u,v)\end{cases}$ avec $\begin{cases}u=ax+by+\alpha\\v=cx+dy+\beta\end{cases}$, $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+B$

φ est une application affine.

On note $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=\left|\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right|=|ad-bc|$.

Théorème :

Soit $\mathcal{D}$ une partie compacte quarrable de $\mathbb{R}^2$ et $f:\begin{cases}\varphi(\mathcal{D})\to\mathbb{R}\\(u,v)\mapsto f(u,v)\end{cases}$ une fonction continue.

$\varphi(\mathcal{D})$ est une partie compacte quarrable de $\mathbb{R}^2$ et

$$\iint_{\varphi(\mathcal{D})} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{\mathcal{D}} f(\varphi(x,y)).\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

La manipulation qui consiste à transformer l'une des intégrales en l'autre est appelée changement de variable affine défini par la relation $(u,v)=\varphi(x,y)$.

Cor : $\mathrm{Aire}(\varphi(\mathcal{D}))=\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}\mathrm{Aire}(\mathcal{D})$

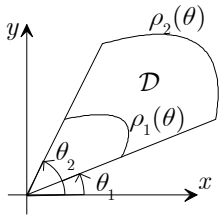
6°) Intégration en coordonnées polaires

Soit $\theta_1\le\theta_2$ deux réels d'un intervalle de longueur 2π .

Soit $\rho_1,\rho_2:[\theta_1,\theta_2]\to\mathbb{R}$ continues telles que $0\le\rho_1\le\rho_2$.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M=(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ dont il existe un système de coordonnées polaires (ρ,θ) avec $\theta_1\le\theta\le\theta_2$ et $\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)$.

On note $\mathcal{D}=\{M(\rho,\theta)/\theta_1\le\theta\le\theta_2 \text{ et } \rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)\}$.



Théorème :

$\mathcal{D}$ est une partie compacte bornée quarrable et pour tout $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ continue on a :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2}\left(\int_{\rho=\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta\ .$$

7°) Généralisation aux intégrales triples

Ce qui a été dit ci-dessus se généralise aux fonctions de trois variables. On parle alors d'intégrale triple d'une fonction continue sur une partie compacte cubable.

Intégration en coordonnées cylindriques : $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\to r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$.

Intégration en coordonnées sphériques : $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\to r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

III. Intégrale curviligne

On se positionne dans le plan $\mathbb{R}^2$. U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1°) Différentielle d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f:\begin{cases}U\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto f(x,y)\end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $a\in U$. Pour tout $h=(h_x,h_y)\in\mathbb{R}^2$, on a $D_h f(a)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a).h_x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a).h_y$.

Déf : On appelle différentielle de f au point a , la forme linéaire :

$$\mathrm{d}f_a:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\h=(h_x,h_y)\mapsto \mathrm{d}f_a(h)=D_h f(a)\end{cases}.$$

Prop : On a $\mathrm{d}f_a=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\mathrm{d}y$.

Déf : On appelle différentielle de f l'application : $\mathrm{d}f:\begin{cases}U\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\\a\mapsto\mathrm{d}f_a\end{cases}$.

Prop : Soit $f:\begin{cases}U\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto f(x,y)\end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On a $\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial x}.\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}.\mathrm{d}y$.

Prop : Soit $f,g:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
$\mathrm{d}(\lambda f)=\lambda\mathrm{d}f,\mathrm{d}(f+g)=\mathrm{d}f+\mathrm{d}g,\mathrm{d}(fg)=f.\mathrm{d}g+g.\mathrm{d}f$.
Si g ne s'annule pas $\mathrm{d}(f/g)=\left(g\mathrm{d}f-f\mathrm{d}g\right)/g^2$.

Prop : Soit $f:U\to\mathbb{R}$ et $\varphi:I\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(U)\subset I$.
$\mathrm{d}(\varphi\circ f)=\varphi'\circ f\times\mathrm{d}f$.

2°) Forme différentielle

Déf : On appelle forme différentielle définie sur U toute application :
$\omega:\begin{cases}U\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\\(x,y)\mapsto\omega(x,y)\end{cases}$.

Déf : On dit que la forme différentielle ω est continue (resp. $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$) ssi les fonctions P et Q le sont.

Déf : On dit qu'une forme différentielle ω définie sur U est exacte ssi il existe $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\omega=\mathrm{d}f$.
On dit alors que f est une primitive de ω.

Théorème :
Soit $\omega(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ une forme différentielle définie sur U avec P et Q fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour que ω soit exacte, il est nécessaire que $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.
De plus, si U est étoilé, cette condition est suffisante.

3°) Intégrale d'une forme différentielle

Soit $\omega(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ une forme différentielle continue définie sur U.

Soit $\Gamma=([a,b],M)$ un arc $\mathcal{C}^1$ inscrit dans U i.e. tel que $\forall t\in I, M(t)\in U$.

Notons, $M(t)=(x(t),y(t))$.

Déf : On appelle intégrale curviligne de ω le long de l'arc Γ le réel :
$\displaystyle\int_\Gamma\omega=\int_\Gamma P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\mathrm{d}t$
Lorsque l'arc Γ est fermé, on note $\displaystyle\oint_\Gamma\omega$.

Prop : $\displaystyle\int_\Gamma\omega$ n'est pas modifié par changement de paramétrage croissant et transformée en son opposé par changement de paramétrage décroissant : c'est une notion géométrique orientée.

Prop : Si ω est une forme différentielle exacte de primitive f alors $\displaystyle\int_\Gamma\omega=f(M(b))-f(M(a))$.

4°) Généralisation aux arcs $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

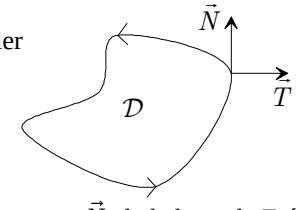
Déf : On appelle arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux toute famille $\Gamma=(\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_n)$ avec $\Gamma_i=([a_i,b_i],M_i)$ des arcs $\mathcal{C}^1$ tels que $\forall 1\le i\le n-1, M_i(b_i)=M_{i+1}(a_{i+1})$.
On appelle support de l'arc Γ la réunion des supports des arcs Γ_i.

Déf : On appelle extrémités de l'arc Γ les points $M_1(a_1)$ et $M_n(b_n)$.
On dit que l'arc Γ est régulier ssi chaque arc Γ_i l'est.
On dit que l'arc Γ est inscrit dans U ssi chaque arc Γ_i l'est.

Déf : On appelle intégrale curviligne de ω le long de l'arc orienté $\Gamma=(\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_n)$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux le réel : $\displaystyle\int_\Gamma\omega=\sum_{k=1}^n\int_{\Gamma_k}\omega$.

5°) Formule de Green-Riemann

Soit $\mathcal{D}$ une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^2$ dont le bord peut être paramétré par un arc Γ fermé régulier $\mathcal{C}^1$ par morceaux ne possédant pas d'autres points doubles que ses extrémités.



Quitte à inverser l'orientation du paramétrage du bord de $\mathcal{D}$, on peut supposer que ce bord est parcouru dans le sens direct, i.e. de telle sorte que le vecteur $\vec{N}$ de la base de Frénêt pointe vers $\mathcal{D}$.

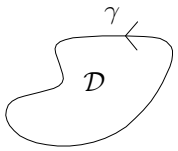
a) formule

Théorème :

Pour $\omega(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert U contenant $\mathcal{D}$ on a : $\oint_\Gamma \omega=\iint_{\mathcal{D}}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

b) application : calcul d'aires

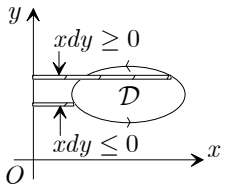
$\oint_\Gamma \omega=\iint_{\mathcal{D}}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$



+ Pour $P(x,y)=0$ et $Q(x,y)=x$

on a $\oint_\Gamma \omega=\iint_{\mathcal{D}}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Ainsi $\text{Aire}(\mathcal{D})=\oint_\Gamma x\mathrm{d}y$.

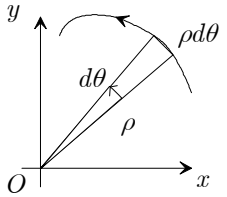


Pour $P(x,y)=-y$ et $Q(x,y)=0$

on obtient $\int_\Gamma \omega=\iint_{\mathcal{D}}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Ainsi $\text{Aire}(\mathcal{D})=\oint_\Gamma -y\mathrm{d}x$.

Par ces deux formules : $\text{Aire}(\mathcal{D})=\frac{1}{2}\oint_\Gamma x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$.

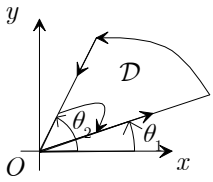


Si le bord de $\mathcal{D}$ est paramétré en coordonnées polaires par $\begin{cases}\rho=\rho(t)\\ \theta=\theta(t)\end{cases}$ avec $t\in[a,b]$.

$\text{Aire}(\mathcal{D})=\frac{1}{2}\oint_\Gamma x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b \rho^2(t)\theta'(t)\mathrm{d}t$.

Mais $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\rho^2\mathrm{d}\theta$ donc la formule précédente se retient : $\text{Aire}(\mathcal{D})=\frac{1}{2}\oint_\Gamma \rho^2\mathrm{d}\theta$

En particulier :



Soit $\theta_1\leq\theta_2$ deux réels d'un intervalle de longueur inférieure à 2π. Soit $\rho_1,\rho_2:[\theta_1,\theta_2]\to\mathbb{R}$ des fonctions $\mathcal{C}^1$ tels que $0\leq\rho_1\leq\rho_2$.

Soit $\mathcal{D}=\{M(\rho,\theta)/\,\theta_1\leq\theta\leq\theta_2 \text{ et } \rho_1(\theta)\leq\rho\leq\rho_2(\theta)\}$.

On a $\text{Aire}(\mathcal{D})=\frac{1}{2}\oint_\Gamma \rho^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho_2^2(\theta)-\rho_1^2(\theta)\mathrm{d}\theta$.